
Le but du TD est de bien comprendre les fonctions et la programmation récursive.

Exercice 1 : Date

1.a] Écrivez une fonction qui détermine si une année est bissextile ou non. On rappelle les règles qui déterminent quelles années sont bissextiles :

- les années multiples de 400 sont toujours bissextiles,
- les années multiples de 100 ne sont pas bissextiles (sauf si elles sont multiples de 400),
- les années multiples de 4 sont bissextiles (sauf si elles sont multiples de 100).

1.b] Écrivez une fonction qui détermine le numéro d'un jour dans l'année en fonction du jour, du mois, et de l'année. Il peut être pratique d'utiliser un tableau contenant le nombre de jours dans chaque mois. Vous pouvez vérifier votre fonction en tapant la commande `date + %j` dans un shell.

1.c] Écrivez une fonction qui calcule le nombre de jours écoulés entre le 1er janvier 2000 et une date ultérieure.

Exercice 2 : Programmation récursive

2.a] Programmez la fonction factorielle par récursivité.

2.b] Programmez le PGCD de façon récursive.

2.c] Programmez l'exponentiation binaire de manière récursive. Cette fonction consiste à calculer a^e en appelant $(a * a)^{e/2}$ si e est pair, et $a * a^{e-1}$ si e est impair et retourne 1 si $e = 0$.

Exercice 3 : Suite de Fibonacci

3.a] Calculez le n -ième nombre de la suite de Fibonacci F_n qui est définie de la manière suivante : $F_0 = F_1 = 1$ et $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ pour $i \geq 2$.

3.b] La méthode récursive est très lente pour n un peu grand car la même valeur est recalculée plusieurs fois. Proposer une variante non récursive qui stocke les valeurs dans un tableau.

3.c] Optimisez votre programme pour qu'il n'utilise que quelques entiers (un nombre indépendant de n).

Cette dernière technique s'appelle de la programmation dynamique : au lieu de recalculer plusieurs fois la même valeur, on la met dans un tableau. Ici, on n'a même pas besoin de stocker tout le tableau car on n'a besoin que des deux derniers éléments pour calculer la valeur de la case suivante du tableau.

Exercice 4 : Conjecture de Collatz

Soit la fonction f des entiers positifs vers les entiers positifs, définie de la façon suivante :

- si $n = 1$, $f(1) = 1$,
- si n est pair, $f(n) = n/2$, et
- si n est impair, $f(n) = 3n + 1$.

Considérons la suite définie par récurrence, $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$, par u_0 et $u_i = f(u_{i-1})$ pour $i \geq 1$. Par exemple, pour $n = 6$, votre fonction doit afficher, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

4.a] Écrivez une fonction qui affiche les valeurs de cette suite pour un entier u_0 donné.

On ne sait pas montrer que pour toute valeur de n , cette suite converge vers 1, mais aucun contre exemple n'est connu. Si on était parti de $n = 27$, la suite aurait mis 111 étapes avant de se terminer par 1.

Exercice 5 : Problème des 8 reines (à la maison)

On veut positionner 8 reines sur un échiquier sans qu'aucune reine soit en prise avec une autre. On rappelle que les reines peuvent se déplacer en diagonale, en ligne ou en colonne d'un nombre de cases arbitraire. Comme on doit avoir au plus une reine par ligne, on va représenter un échiquier en utilisant un tableau de 8 entiers où la i -ème case correspond à la position de la reine sur la i -ème ligne. Utilisez un algorithme récursif pour afficher toutes les solutions du problème.